

# 小波域图像降噪概述

李旭超 朱善安

(浙江大学电气工程学院 杭州 310027)

**摘要** 小波域图像降噪是图像处理中一个引人注目的研究方向,为了使人们对小波域图像降噪有一概括了解,在对小波域图像降噪相关文献进行分析和理解的前提下,首先给出了小波变换的特性,同时阐述了小波去噪的最优准则和对图像进行小波变换时小波基的选取原则,然后评述了用于图像降噪的方法,并分析了利用小波系数建模的常用方法,最后探讨了小波域图像降噪的发展方向。

**关键词** 小波域图像降噪 贝叶斯准则 先验概率 小波系数建模

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2006)09-1201-09

## Survey of Wavelet Domain Image Denoising

LI Xu-chao, ZHU Shan-an

(Electrical Engineering College, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

**Abstract** Wavelet domain image denoising has been a striking research problem in image processing. In order to give people a summary knowledge of wavelet domain image denoising, based on many literatures of wavelet domain image denoising, this paper attempts to make a survey of wavelet domain image denoising. First, it gives the characteristics of wavelet transformation, and gives the optimization criterion of wavelet domain image denoising, the selection of wavelet basis. Then, describes the methods of image denoising, and analyzes the building model methods capitalized on wavelet coefficients. At the end, the future trend of wavelet domain image denoising is pointed out.

**Keywords** wavelet domain image denoising, Bayes principle, priori probability, wavelet coefficient model

### 1 引言

图像在生成和传输过程中常常因受到各种噪声的干扰和影响而使图像降质,这对后续图像的处理(如分割、压缩和图像理解等)将产生不利影响。研究表明<sup>[1]</sup>,一张模拟图像,当信噪比低于 14.2dB 时,图像分割时的误检概率大于 0.5%,参数的估计误差大于 0.6%。噪声可以理解为“妨碍人们的感官器官对所接受的信源信息理解的因素”,而不同的图像噪声,人的感觉程度是不同的,这就是人的噪声视觉特性问题。该方面虽早已进行研究,但终因人的视觉系统本身没搞清楚而未获得解决。尽管如此,图像去噪在数字图像处理技术中的重要性越加

明显,例如在医学上,现在注重的是非侵入式诊断,但目前得到的 MRI 图像因受到高磁场的干扰而使得无法确定微小组织的变化,另外,高放大倍数遥感图像的判读、X 射线图像系统中噪声的去除、电能质量的检测等都使降噪成为不可缺少的技术。传统的图像去噪方法,是基于噪声和信号的统计特性不同,采用低通滤波的方法来进行去噪。在空域中,当噪声的统计特性未知时,则可以采用局部平滑算子来进行去噪,这种方法的优点是可以进行并行处理,且计算量小;其缺点是,去噪性能受窗口大小选取的影响。若噪声的统计特性已知,在频域中,则可以采用 Wiener 滤波器、最小二乘滤波器来进行全局降噪,但使用此种方法,需要知道噪声和信号的统计模型,由于在实际应用中,不知道或不可能用简单的随机

收稿日期 2005-08-26 改回日期 2005-10-31

第一作者简介 李旭超(1974~)男,浙江大学电气工程学院博士研究生。主要研究方向为小波理论和马尔可夫随机场在图像处理中的应用等。E-mail: 6495312@zju.edu.cn

过程描述图像的统计模型,因此计算量相当大,而且低通滤波的方法在有效地消除噪声的同时,也会使图像的边缘模糊。其他的去噪方法还有基于水平集的方法<sup>[2]</sup>、基于形态学滤波的方法<sup>[3]</sup>和基于马尔可夫模型的方法<sup>[4,5]</sup>等。

近年来,随着小波理论的应用日益成熟,由于其具有良好的时频局部化特性,因而在图像去噪、分割和压缩等领域得到广泛的应用<sup>[6,7]</sup>。小波变换的以下几个方面的特性,使小波域统计图像处理具有吸引力:

(1)空、频局部化特性 每一小波系数能同时表征图像在空域和频域的局部内容,是一种窗口大小固定不变,而形状可变,且空域和频域的窗口都可以改变的局部化分析方法。由于傅里叶变换是一种全局变换,其要么完全在空域,要么完全在频域,因此无法同时表征信号的空、频局域性质;

(2)多分辨率特性 图像经一系列小波变换就可以得到不同尺度下的图像特征,并能较好地刻画图像的非平稳性,而短时傅里叶变换则是一种单一分辨率的信号分析方法;

(3)边缘检测特性<sup>[8,9]</sup> 图像经小波变换后,由于边缘等奇异点的小波系数幅值较大,而平稳区域的小波系数幅值则较小,因此图像的边缘可以在相应的位置用较大的小波系数来表征,以便在去噪时,对这些边缘点有所回避,即可达到去噪和保护边缘的目的,而传统的低通滤波的方法,则在去噪的同时,使图像的边缘模糊;

(4)能量紧支撑性 图像经小波变换后,在小波支撑范围内,边缘等非平稳区域,幅值较大的小波系数较稀疏,且大多数平稳区域的小波系数的幅值趋向于零,由于这样可以利用信号的能量来确定阈值,从而可以对图像进行自适应阈值去噪;

(5)去相关性 图像经正交小波变换后得到的小波系数近似去相关,这种去相关性表明,小波系数在局部区域有较弱的依赖关系,而空域则在一定范围内,周围点像素的相关性较强;

(6)非高斯分布特性 由于图像经小波变换后得到的子带小波系数呈现出重拖尾的非高斯分布,从而可选用相应的概率分布函数来逼近小波系数的联合概率分布;

(7)小波系数的持续性 图像经小波变换后,模值较大的小波系数沿尺度间进行传播,这样不仅有利于形成尺度间的依赖关系,而且为尺度间小波

系数模型的建立提供了可能。

## 2 小波去噪的研究过程

在图像处理中,图像去噪是一个永恒的主题,由于小波变换的上述特性已使得人们将去噪的注意力从空域和频域转移到小波域。根据小波变换的特性,图像的平滑部分主要集中于低频,而图像的高频部分则有图像的噪声信息和图像的细节信息,主要有以下 3 个方面的研究方向将信号与噪声分开:

(1)利用小波的奇异检测特性将信号与噪声分开<sup>[8,9]</sup> 这个方向研究的开拓者是 Mallat,其利用极值点中的边缘与噪声的李氏指数不同来提取真正的边缘点,同时保留这些极值点的小波系数,并用交替投影法反复重构分解迭代,直到得到满意的去噪效果,但交替投影迭代对图像来说,不仅计算量巨大,且收敛缓慢,还有可能产生振荡和不稳定;

(2)利用小波系数阈值收缩法来分开噪声、信号,因为一般噪声分解后的小波系数幅值都比较小,所以可以利用这个特性去除较小的小波系数,以便直接得到去噪后重构图像的小波系数,这种方法简单有效。对小波系数进行阈值处理的基本思想来源于 Donoho 理论<sup>[10-12]</sup>,Donoho 首次给出了基于正交小波变换的通用的阈值去噪公式,并从最小最大意义上论证了给出的通用阈值具有渐进最优性。这种 Donoho 的阈值去噪思想没有根本性的变革,该去噪方法表明,其虽可以用简单的系数处理来解决复杂的去噪问题,但是由于 Donoho 阈值的确定,不具有尺度间的自适应性,且过扼杀小波系数还可使图像的细节丢失,去噪效果并不理想,因此许多学者提出了不同尺度的小波系数,以使用不同的阈值来进行去噪,Chang 在基于正交小波变换的基础上,提出了随尺度变化的接近最优的自适应阈值<sup>[6]</sup>,其去噪效果比经典的 VisuShrink 阈值<sup>[12]</sup>和由 Donoho 改进的子带自适应 SureShrink 阈值<sup>[10]</sup>去噪效果好,但基于正交小波变换的阈值去噪,容易在图像重构时产生 Gibbs 现象,其图像的视觉效果并不理想。Pan 等人提出的基于非正交小波变换的硬阈值去噪方法<sup>[13]</sup>,其去噪效果比基于正交小波变换尺度间可变的硬阈值去噪效果好,视觉效果也较理想,但硬阈值去噪不仅会使数据突变,且对图像数据的微小变化相当敏感。现在人们的注意力已从阈值去噪转移到小波域贝叶斯准则去噪<sup>[14]</sup>,这种方法能严重收缩较小的小

波系数,而略微收缩较大的小波系数,其最关键的问题是如何获取理想图像的先验信息。另外,小波系数统计特性的概率模型也被广泛地进行研究,如小波域隐马尔可夫模型,特别是近来提出的隐马尔可夫树结构模型<sup>[15]</sup>。这种模型通过对每个小波系数引入有限个隐状态,并且认为尺度间的小波系数状态具有马尔可夫特性,这种小波系数通过尺度间状态的连接可形成一种递阶层次树,而且将其应用于信号去噪可取得较小的误差平方和。

### 3 小波域图像去噪准则和小波基选取

进行小波域图像去噪时,首先通过对被噪声污染的图像  $Y$  进行小波变换来得到小波系数  $y$ ,然后采用适当的去噪准则来对  $y$  进行处理,即得到估计的小波系数  $\hat{x}$ ,再对处理后的小波系数  $\hat{x}$  进行小波逆变换即可得到重构的图像,其中去噪准则和小波基的选择是小波域图像去噪的重要环节,下面分别加以阐述。

#### 3.1 小波域去噪准则

##### 3.1.1 小波域阈值去噪准则

(1)硬阈值 硬阈值是指绝对值大于或等于阈值  $T$  的小波系数予以保留,而其他小波系数则作为噪声置为零,可用如下形式表示:

$$\hat{x} = \begin{cases} y & \text{若 } |y| \geq T \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (1)$$

利用硬阈值去噪时,由于信号在阈值处是不连续的,即利用  $\hat{x}$  重构所得信号可能会产生一些震荡,因此不具有同理想图像相同的光滑性。特别是当噪声级较高时,容易使重构的图像产生 Gibbs 现象。

(2)软阈值 软阈值是指对绝对值大于或等于阈值  $T$  的小波系数不是简单地予以保留,而是将其收缩置零,可用如下形式表示:

$$\hat{x} = \begin{cases} \text{sgn}(y) \chi(|y| - T) & \text{若 } |y| \geq T \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $\text{sgn}(\cdot)$  表示符号函数。由软阈值估计出来的  $\hat{x}$  虽然整体连续性好,但是由于幅值超过阈值的小波系数与估计的小波系数总存在偏差,因此直接影响重构信号与真实信号的逼近程度。

##### 3.1.2 小波域贝叶斯去噪准则

小波域贝叶斯去噪问题的本质是一个优化问题,即由于图像经小波变换去噪后得到的重构图像可逼近真实图像,从而使贝叶斯风险最小,可用如下

表达式来表示:

$$R = E[\alpha(x, \hat{x})] = \iint \alpha(x, \hat{x}) p(x, y) dx dy \quad (3)$$

其中  $y$  为被噪声污染的图像的小波系数,  $\hat{x}$  为去噪后图像的小波系数估计值,  $x$  为期望得到的图像的小波系数,  $E[\cdot]$  为数学期望,  $p(\cdot, \cdot)$  为概率密度函数,  $\alpha(\cdot, \cdot)$  为耗费函数。由式(3)有

$$R = \int p(y) dy \int \alpha(x, \hat{x}) p(x|y) dx \quad (4)$$

式中  $p(y)$  为被噪声污染图像的小波系数的概率密度函数,  $p(x|y)$  为期望图像的小波系数的后验概率。若要使贝叶斯风险最小,则有

$$\frac{d}{dx} \int \alpha(x, \hat{x}) p(x|y) dx = 0 \quad (5)$$

其中,耗费函数  $\alpha(\cdot, \cdot)$  的选取不同,则有以下不同的估计准则:

①若  $\alpha(x, \hat{x}) = (x - \hat{x})^2$ , 则得到的估计准则为最小方差估计,这种最优准则在整体上可使期望图像与理想图像的估计误差最小,但局部却有可能使期望信号严重偏离理想信号,其表达式为

$$\hat{x} = \int x p(x|y) dx \quad (6)$$

②若  $\alpha(x, \hat{x}) = 1 - \alpha(x - \hat{x})$  (式中  $\alpha(\cdot)$  为采样函数), 则得到的估计准则为最大后验概率估计,这种估计准则是每一个小波系数的最大概率与理想图像的小波系数有相同的概率,其表达式为

$$\hat{x} = \arg \max p(x|y) \quad (7)$$

③若  $\alpha(x, \hat{x}) = 1 - \alpha(x - \hat{x})$ , 且理想图像的小波系数的先验概率  $p(x)$  无法获得,则得到的估计准则为最大似然估计,这种估计准则是最大后验估计准则的极限情况,其表达式为

$$\hat{x} = \arg \max p(y|x) \quad (8)$$

#### 3.2 小波基的选取原则

图像在去噪前,需先对图像进行小波变换,但小波基的选择对去噪性能有重要的影响。首先,图像经分析小波变换后得到的小波系数越稀疏,越有利于去噪,即经小波变换后会产生尽可能多接近零的小波系数;其次,用不同小波基进行小波变换得到的重构图像,其视觉效果不同。

##### 3.2.1 分析小波的选取原则

一般说来,为了使图像经小波变换后具有稀疏的小波系数,选择分析小波时,需要考虑小波的消失矩和支撑的尺寸。小波的消失矩<sup>[16]</sup>定义为

$$\int \psi(t) t^m dt = 0 \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (9)$$

上式称小波  $\psi(t)$  具有  $M$  阶消失矩, 小波的消失矩特性可使图像在进行展开时消去高阶平滑部分, 也就是可使图像的平滑部分的小波系数非常小, 而小波变换将仅仅反映图像的高阶变化部分, 即图像的边缘。小波的支撑尺寸越短, 越有利于图像边缘等奇异点的定位, 这样就可使较大的小波系数落在小波的支撑尺寸内。但由于信号的多项式的最高次幂应小于小波的消失矩, 否则, 信号的奇异性就不能由小波变换完全体现, 也不能使信号的系数全为零, 因此小波的消失矩越高, 紧支撑的尺寸越小, 越有利于去噪。

### 3.2.2 重构小波的选取原则

为了减小重构后的图像对视觉的影响, 选择重构小波时, 一般应考虑其正则性和对称性<sup>[17, 18]</sup>。即正则性是小波光滑性的反映, 正则性越高, 小波的光滑性越强, 频域的局部性越好, 这样就有利于消除由经阈值处理后得到的小波系数  $\hat{x}$  所引入的误差对视觉的影响。由于人的视觉系统对非对称性误差敏感, 而对对称误差不敏感, 因此通常选用对称小波。

## 4 小波域图像去噪的分类

### 4.1 奇异点检测去噪

现实世界中的信号变化较缓慢, 而噪声变化则较快, 在数学上, 这意味着噪声和信号的变化可用局部正则性来加以表征, 而李氏指数则是表示信号局部正则性的一种度量<sup>[8, 16]</sup>。小波系数的模极大值和李氏指数之间的关系如下式所示:

$$|y_s| \leq ks^\alpha \quad (10)$$

式中  $k$  为小波的支撑尺寸,  $s$  为小波变换的尺度, 若  $s = 2^j$ , 则为二进制小波,  $j$  为小波的分解级,  $\alpha$  为李氏指数。若信号的李氏指数大于等于零<sup>[8]</sup>, 则由式 (10) 可知, 图像的边缘等奇异点小波系数随着尺度的增加, 其模值变化缓慢; 若噪声的李氏指数小于零<sup>[8]</sup>, 则由式 (10) 可知, 噪声的小波系数模值随尺度的增加而迅速减小。柳薇等依据此区别, 提出了基于边缘检测的图像小波阈值去噪方法<sup>[19]</sup>, 其是先确定边缘而后去噪, 以便在去噪时对边缘有所回避。Mallat 和 Hwang 利用信号的边缘与噪声的李氏指数不同<sup>[8]</sup>来检测图像的多尺度边缘, 另外由于图像的重要结构通常产生较长的边缘, 而短边缘则往往是由噪声引起的, 从而可去除伪边缘, 这种边缘检测方法同 Canny 的多尺度边缘检测方法相吻合<sup>[20]</sup>, 这样

就可利用检测到的边缘来重构图像。这种方法对于最小方差标准来说, 虽取得了较高的去噪性能, 但是用这种方法得到的重构图像不唯一, 且重构后的图像所有纹理消失。文献 [14] 通过尺度间小波系数的比率标准来确定重构图像的小波系数, 这种方法不同于 Mallat 模极大值去噪, 这种方法是根据信号受噪声影响的概率来处理所有的小波系数, 而 Mallat 模极大值法则仅处理小波系数的边缘点。文献 [14] 的方法虽然比用模极大值来确定小波系数简单, 且去噪性能较好, 但是分母的微小变化可能导致边缘的误检。文献 [21] 用尺度间小波系数的差与阈值之间的大小关系来决定小波系数存留, 这种去噪算法将 Mallat 小波模极大值检测算法和 Donoho 阈值确定方法相结合, 然后根据阈值决定小波系数的取舍, 这种算法不仅避免了 Mallat 算法的复杂重构图像的过程, 而且去噪后保护图像的边缘比 VisuShrink 阈值去噪后的图像效果好。但同时拒绝或选择奇异点两个方向的小波系数, 会使得去噪效果不是最优的, 因为某个方向的小波系数可能是由噪声引起的, 而另一个方向的小波系数则可能是由边缘引起的。文献 [22] 用尺度间小波系数的积来决定小波系数的存留, 即利用尺度间信号的小波系数比噪声的小波系数相关性强, 其算法是一种修改的低通滤波器, 其中高频分量只有具有尺度间的高度相关性才被保留, 即检测到的边缘位置的小波系数被保留, 而将其他位置的小波系数置为零, 其优点是可逐步从不同尺度的子带中选择边缘。

### 4.2 小波系数阈值法去噪

#### 4.2.1 固定阈值

在阈值的确定上, Donoho 和 Johnstone 开创了先例, 他们给出了通用的阈值  $T = \hat{\sigma} \sqrt{2 \ln N}$ <sup>[12]</sup>, 这表明阈值的选取需依赖于噪声的标准差  $\hat{\sigma}$  和信号的小波系数的长度  $N$ , 在一些图像去噪应用中, 常常假设噪声的方差已知, 以便确定相应的阈值, 但由于在实际情况中, 噪声的方差未知, 因此必须从被污染的信号中来对噪声的方差进行估计, 一般在分解图像的最高频子带中包含噪声, 噪声的估计常用一种中值测度, 在文献 [12] 中, 建议  $\hat{\sigma} = \text{media}(|y_1^{\text{HH}}|) / 0.6745$  (式中 HH 代表小波分解的高频子带), 文献 [23] 应用此公式估计噪声的方差, 又应用于图像的去噪取得了良好的效果。但 Donoho 的通用阈值有一个弱点, 即随着小波系数数目  $N$  的增加, 相应的阈值也在增加, 若将所有的小波系数置为零, 则严重

地使图像的细节丢失;另一种情况是,当  $N$  较小时,由于阈值较小,因而不能有效地去除噪声,由于阈值的选取同图像的尺寸相关,因此去噪效果不具有鲁棒性。Donoho 和 Johnstone 等在阈值去噪方面<sup>[10,11]</sup>做了一系列卓有成效的工作,又提出了 SureShrink 阈值。此后针对 Donoho 和 Johnstone 的小波阈值, Nason 和 Wegrich、Warchola 先后提出了交叉验证法 (cross validation, CV)<sup>[24]</sup> 和广义交叉验证法 (generalized cross validation, GCV)<sup>[25]</sup>,但 Nason 的 CV 方法和 Wachola 的 GCV 方法,对 Donoho 的改进效果是有限的,虽然 Donoho 的阈值策略<sup>[12]</sup>是利用量测信号的小波细节信号的统计值作为阈值,其精度稍有不足,但由于计算量小,因而很实用。而 CV 方法则是通过对信号进行交叉处理和小波变换来确定阈值,其精度虽有所提高,但计算量却大大增加。万永福、袁震东在文献[24,25]基础上,提出了广义分数幂模型<sup>[26]</sup>,将其阈值策略函数写成一个统一的表达式,即

$$\hat{x} = \text{sgn}(y) T_1(|y|, T) \mathcal{K}(|y| > T) \quad (11)$$

式中阈值为

$$T_1(|y|, T) = (|y|^\alpha - T^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (12)$$

$\mathcal{K}(\cdot)$  为示性函数,若  $|y| > T$ ,则满足  $\mathcal{K}(|y| > T) = 1$ ,否则  $\mathcal{K}(|y| > T) = 0$ 。当  $\alpha = +\infty$  时,式(11)变为式(1);当  $\alpha = 1$  时,式(11)变为式(2);当  $\alpha = 2$  时,式(11)变为“几乎硬抑制收缩函数”<sup>[27]</sup>:

$$\hat{x} = \text{sgn}(y) \sqrt{(y)^2 - T^2} \mathcal{K}(|y| > T) \quad (13)$$

一般可通过优化参数  $\alpha$  来确定阈值,这种广义分数幂模型主要适用于加性高斯噪声,也是一种精度最优的小波阈值收缩策略。

#### 4.2.2 自适应阈值

虽然 Donoho 对所有分解级的小波系数都采用相同的阈值去噪,然而由于现实中的图像是非平稳的,因此用单一阈值不具有自适应性,且难以取得令人满意的效果。权衡去噪和保护图像的边缘两者的得失,去噪算法必须适应图像的不连续。由于图像经小波分解后不同子带不同分解级的小波系数具有不同的分布,为此文献[28]给出了随着分解级的不同,采用不同的阈值  $T = \hat{\sigma} \sqrt{2 \ln N / \ln(j+1)}$  来进行去噪的方法,其去噪性能虽优于 Donoho 的全局阈值,但是这种阈值仅在 Donoho 基础上做了较小的修改,还不具有子带阈值最优。邓大新等人提出了基于 Neyman-Pearson 准则的最优阈值<sup>[29]</sup>,这种阈值的

选择是依据设定的虚警概率,通过使得噪声的检测概率最大来设定的,其去噪效果在最小均方差意义上虽然好于 Donoho 的方法,但是这种方法仍然对同一分解级、同一子带具有相同的阈值,仅是子带阈值最优。在高噪声环境下,由于小波系数邻域的空间结构在信号和噪声的分离上起着很重要的作用,且信号通常形成有意义的特征,如边缘、角、点、线等,而噪声的系数则呈现出分布的随机性,因此如何在去噪的同时,对图像施加空间限制,以便能准确地刻画图像的纹理结构,进而对每个小波系数施加不同的阈值来达到对图像去噪的目的。文献[6]是将信号的小波系数用通用高斯函数 (generalized Gaussian distribution, GGD) 来逼近,而对噪声则用高斯函数来逼近,其在最小方差和软阈值条件下得到的最优阈值估计器为  $T = \sigma_{\text{noise}}^2 / \sigma_{\text{signal}}$ ,其中  $\sigma_{\text{signal}}$  是信号的方差,而  $\sigma_{\text{noise}}^2$  是噪声的标准差,这样就可以通过像素的局部特性来确定像素的标准差,进而产生相应的阈值  $T$ 。从能量的角度来说,当  $\sigma_{\text{noise}}^2 / \sigma_{\text{signal}} \gg 1$  时,噪声占主导地位,此时为了消除噪声,应抑制信号;当  $\sigma_{\text{noise}}^2 / \sigma_{\text{signal}} \ll 1$  时,则在消除噪声的同时,有利于保持小的信号。这种门限是在正交小波变换的前提下,通过一个邻域的移动窗来在每一子带中得到的,因为不同子带小波系数的统计特性不同。但用此种方法去噪后,在图像的边缘处会产生 Gibbs 现象和在平滑区域产生斑点。文献[23]将上述方法由正交小波变换改为冗余小波变换,这种小波变换在没有下采样的条件下,由于小波系数具有相关性,因此去噪效果好于正交小波变换,其主要表现在以下两方面:一方面,这种自适应阈值策略有效地移去了平滑区域的噪声,而对边缘及纹理区域的影响则较小;另一方面,不仅图像的视觉效果明显改善,而且边缘处的 Gibbs 现象明显减弱。文献[30]根据小波系数的持续性,认为每一小波系数的确定,由于受其父节点的影响,因此小波系数收缩策略由其父节点和该节点共同决定。

#### 4.3 贝叶斯方法去噪

在利用贝叶斯准则进行图像去噪时,由于需要知道理想图像的小波系数先验模型的统计特性,因此常用概率分布函数来描述;而对小波系数的空间局部作用关系则常用马尔可夫模型来描述。

##### 4.3.1 先验模型用概率分布函数来描述

图像经小波变换后,随着分解级数的增加,不仅小波系数的幅值越来越大,且样本点数越来越愈少,呈

现出重拖尾的非高斯分布,目前普遍认同的是每一子带每一尺度的小波系数可以用独立同分布的 GGD 来建模<sup>[23, 24, 31]</sup>,即可以通过调整形状参数来适应小波系数的分布。GGD 的两个特殊情况是当形状参数为 1 时,则利用拉普拉斯分布来逼近小波系数的分布<sup>[32]</sup>;当形状参数为 2 时,则利用高斯分布来逼近小波系数的分布<sup>[33]</sup>。文献[6]研究表明,用 GGD 逼近小波系数的先验概率分布,其门限的选取与形状参数无关,而仅仅依赖于噪声和信号的局部方差之比,但贝叶斯风险却随着形状参数的增加而增大,当形状参数取 0.5~1 时,贝叶斯风险较小。同时也说明,用拉普拉斯分布逼近小波系数的分布比用高斯分布来逼近小波系数的分布的去噪效果好。文献[34]在研究 SAR 图像时,用 alpha-stable 分布来逼近小波系数的分布;文献[35]用有限高斯混合模型来逼近小波系数的非高斯分布,且每个小波系数都引入两个隐状态,其中一个对应图像的边缘,另一个对应图像的平滑区域;文献[36]用高斯尺度混合模型(Gaussian scale mixture, GSM)来逼近小波系数的分布,上述方法具有变尺度的特性,即参数随尺度的变化而变化。由于贝叶斯方法通常计算量巨大,且要求仔细调节先验模型的参数,为此文献[37]提出一种非信息的 Jeffrey's 先验模型,这种方法不仅计算量小,且其去噪性能好于 VisuShrink 和 SureShrink 阈值去噪法,其不仅无需调整参数,且具有信号幅度不变的特性。

#### 4.3.2 先验模型用马尔可夫模型来描述

在图像处理和模式识别中,不仅图像中相邻的像素具有较强的相关性,而且图像通过非正交小波变换得到的小波系数也具有较强的相关性,虽然进行正交小波变换具有去相关性,但根据小波系数的持续性,尺度间的小波系数仍具有较强的相关性,根据小波系数的紧支撑性,由于尺度内相邻的小波系数在某种程度上具有共同属性,因此如何处理小波系数的局部作用关系,对图像的处理有很重要的影响。马尔可夫模型就是描述局部作用关系的强有力工具。目前描述像素间的统计依赖关系的马尔可夫先验模型有 Ising 模型、automodels 模型、auto-logistic 模型和 auto-binomial 模型等<sup>[38]</sup>。在空域中,使用马尔可夫随机场模型,并利用 Bayes 准则对图像进行去噪<sup>[39]</sup>是由 Geman 创立的,此后由 Gidas 延拓到多网格框架<sup>[40]</sup>。目前,将马尔可夫模型应用于小波域图像处理是一个极其活跃的研究课题。在小波域图

像去噪中,应用马尔可夫随机场(Markov random field, MRF)作为理想图像的先验模型主要有以下两个不同的发展方向:一是给定被噪声污染的小波系数细节图像,再应用贝叶斯准则来获得被去噪的细节图像的小波系数,这种方法的关键是对马尔可夫模型中局部势函数的构建,即原子团的结构,其应当惩罚由噪声引起的突变,而不应惩罚由没有噪声的边缘引起的不连续,如在隐马尔可夫树模型中<sup>[41]</sup>,在局部环境下小波系数的能量就被用来表示边缘的存在,而在小波域中,构造 MRF 先验模型,以反映图像的边缘等重要结构则是一个值得研究的问题,目前,这方面还没有进行充分的研究;另一发展方向是用二进制掩模来表示重要小波系数的位置,即首先用被噪声污染的小波系数来确定小波系数重要性的一个测度,这个测度可以是小波系数的幅值、小波系数的局部李氏指数或尺间小波系数的幅值之比等,然后通过对该测度进行二值化来得到初始掩模,最后利用贝叶斯准则来获得最终表示小波系数重要性的掩模,这样根据此掩模即可得到最终去噪后的小波系数。在掩模估计模型中, MRF 先验模型可用于表示细节图像的几何或空间聚类特点,如在 Malfaits 中就使用各向同性自回归 MRF 先验模型<sup>[14]</sup>,同时用局部李氏指数分配给每一小波系数重要性的测度。如 Jansen 选择小波系数的幅值作为小波系数重要性的测度<sup>[42]</sup>, Pizurica 构造的重要性测度<sup>[43]</sup>既依赖于小波系数的尺度间比,又依赖于小波系数的幅值,其构造的各向异性的 MRF 先验模型比 Malfait 构造的各向同性的 MRF 先验模型虽稍微复杂,但其去噪后对图像边缘的保持效果却得到了明显的改善。

## 5 小波系数的统计模型

在小波域图像去噪中,如何准确地刻画图像的小波系数,对图像的成功去噪起着至关重要的作用,因为小波系数统计模型能准确地反映图像的结构。根据小波变换的特点,小波系数的统计模型主要有尺度内模型、尺度间模型和混合模型,其中,尺度内模型主要考虑尺度内小波系数的紧支撑性和局部统计特性;尺度间模型主要考虑的是小波系数的持续性及尺度间的依赖关系;混合模型则能有效利用尺度内、尺度间小波系数的统计特性,将二者有效结合起来反映图像的结构特征。

### 5.1 尺度内模型

对于尺度内的小波系数,大多数文献认为,小波系数是相互独立的,采用高斯混合模型来逼近被加性噪声污染的小波系数的联合分布,这种模型虽较简单,且联合高斯模型能捕捉小波系数间的线性相关性,但这与小波系数的紧支撑性非高斯分布相矛盾。文献[44,45]为了捕捉小波系数的非高斯分布,提出了小波系数间相互独立的混合模型,即对每个小波系数引入两个隐状态,其中一个状态的方差较大,另一个状态的方差较小,这样每个小波系数就可用两个状态的高斯混合来逼近小波系数的分布,虽然每个状态服从高斯分布,但其混合模型却服从非高斯分布。这种模型仍有缺点,那就是其认为每个小波系数是相互独立的,虽然小波变换有近似的去相关性,但是由于小波系数具有紧支撑性,因此相邻的小波系数具有一定的共同属性。文献[46]提出了隐马尔可夫链模型,这种模型认为,尺度内小波系数之间是相关的,其依赖关系可通过隐状态来进行传播,这虽更能体现小波系数的紧支撑性,但却认为尺度间小波系数相互独立,这与小波系数的持续性相矛盾,因此需要合理地建立尺度间模型。

### 5.2 尺度间模型

尺度间模型描述的是尺度间小波系数之间的依赖关系,即根据小波系数的持续性,若上一尺度的小波系数模值较大(或较小),则下一尺度在同一空间位置的小波系数模值也较大(或较小),Liu和Moulin利用互信息作为一种测度,从理论上分析了小波系数的尺度间依赖性<sup>[47]</sup>。Shapiro利用此性质提出了基于嵌入式零树小波系数的图像压缩算法<sup>[71]</sup>。由此可见,如何捕捉和利用小波系数的尺度间关系来对图像去噪有重要影响。文献[30]提出了基于尺度间的双变量收缩函数的小波去噪法,并推导出每一小波系数由该点的小波系数和其上一尺度的小波系数来共同确定的结论。文献[48]提出了基于尺度间小波系数模型的图像去噪法。文献[49]则利用状态转移矩阵来捕捉尺度间小波系数的依赖关系。

### 5.3 混合模型

这种模型综合是在考虑了尺度间小波系数的持续性和尺度内小波系数的紧支撑与非高斯分布等统计特性而建立起来的,其比独立地建立起来的尺度间小波系数统计模型更能准确地反映图像的结构。这类模型在尺度间用一阶马尔可夫链进行状态的连

接,以反映小波系数的持续性,在尺度内每个小波系数则通过引入有限个隐状态来逼近小波系数的重拖尾的非高斯分布。小波域隐马尔可夫模型(hidden Markov model, HMM)<sup>[49]</sup>中的每个小波系数具有有限个隐状态,这是由于小波变换的去相关性和稀疏性能降低隐状态的数量,从而使得HMM可以操作和使用的缘故。在空域中,对于一个灰度级为256的图像来说,若对每个像素引入256种状态,那么对一个像素的每个状态的概率计算精度要求将相当高,同时计算量大大增加。小波域HMM模型,特别是隐马尔可夫树(hidden Markov tree, HMT)模型<sup>[49]</sup>是由Crouse等人最近提出的,HMT模型通过对小波系数施加一种树结构的马尔可夫链来捕捉尺度间小波系数的持续性,将其应用于信号去噪虽取得了比VisuShrink阈值去噪更小的误差平方和,但是HMT模型需要复杂的expectationmaximization训练算法,同时由于HMT模型的递阶树结构使得小波系数不连续,因此去噪后的图像会产生伪边缘和块效应,另外,HMT模型也不能较好地刻画小波系数的局部统计特性。文献[50]在此基础上,为了更好地捕捉小波系数尺度间的依赖关系,提出了HMT-2模型,HMT-2模型不同于每个小波系数具有2个隐状态的HMT模型,其区别在于,其每个节点具有4个隐状态,即将HMT模型中的2个节点变为HMT-2模型中的一个节点,由于其使得尺度间小波系数间的相关性增强,因而其在信号去噪中取得了比HMT模型更小的误差平方和。文献[51]提出contextual HMM(CHMM)模型,这种模型既可捕捉尺度内小波系数的局部作用关系,又可捕捉尺度间小波系数的持续性,但由于CHMM模型不具有空间自适应性,因而仍不能准确地反映图像的结构。文献[41]提出了local CHMM(LCHMM)模型,其不但利用了局部窗口高斯混合模型来捕捉尺度内小波系数的依赖关系,还考虑了尺度间小波系数的依赖关系。由于LCHMM模型具有空间自适应性,因此不仅可降低去噪后图像的伪边缘,而且可改善图像的质量,即其比Donoho阈值和HMT模型去噪后图像的信噪比更高。

## 6 小波域图像去噪的发展方向

虽然小波域去噪方法已成为图像去噪的重要研究方向,但大多数文献仅对高斯噪声去噪进行了广

泛的研究,而对非高斯噪声去噪的研究还远远不够。目前国内外已开始转向这一领域,但是如何将对高斯噪声去噪的研究成果推广到非高斯噪声的去噪,仍然是个难点。

在利用贝叶斯准则对图像进行去噪时,如何准确获取理想图像的先验信息,对图像的成功去噪起着至关重要的作用,而且如何建立理想图像的先验概率模型,以适应图像的非平稳性,特别是空间先验模型的自适应性以及对各向异性的马尔可夫模型还有待进行深入研究。

从尺度间模型、尺度内模型到混合模型,由于准确的小波系数模型可提高图像的去噪性能,因此建立精确的小波系数模型不仅是应用的需要,也是去噪取得突破进展的关键问题。

### 参考文献 (References)

- 1 Lei Tian-hu, Udupa Jayaram K. Performance evaluation of finite normal mixture model-based image segmentation techniques[ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12( 10 ): 1153 ~ 1169.
- 2 Feng Zhi-lin, Yin Jian-wei, Liu Yang, *et al.* Research on jacquard fabrics image denoising using Allen-Cahn level set mode[ J ]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2005, 39( 2 ): 185 ~ 189. [ 冯志林, 尹建伟, 刘洋等. Allen-Cahn 水平集的提花织物图像去噪研究[ J ]. 浙江大学学报, 2005, 39( 2 ): 185 ~ 189. ]
- 3 Wang D, Haese-Coat V, Bruno A, *et al.* Some statistical properties of mathematical morphology[ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43( 8 ): 1955 ~ 1965.
- 4 Besag J. Spatial interaction and statistical analysis of lattic systems [ J ]. Journal of Royal Statistical Society, 1974, 36( 2 ): 192 ~ 236.
- 5 Besag J. On the statistical analysis of dirty pictures[ J ]. Journal of Royal Statistical Society, 1986, 48( 3 ): 259 ~ 302.
- 6 Chang S G, Yu B, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression[ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9( 9 ): 1532 ~ 1546.
- 7 Shapiro J M. Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients[ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41( 12 ): 3445 ~ 3462.
- 8 Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with wavelets[ J ]. IEEE Transactions on Information Theory, 1992, 38( 2 ): 617 ~ 643.
- 9 Mallat S, Zhong S. Characterization of signals from multiscale edges [ J ]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14( 7 ): 710 ~ 732.
- 10 Donoho D L, Johnstone Iain M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[ J ]. Journal of the America Statistical Association, 1995, 90( 432 ): 1200 ~ 1224.
- 11 Donoho D L. De-noising by soft-thresholding[ J ]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41( 3 ): 613 ~ 627.
- 12 Donoho D, Johnstone Iain M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage[ J ]. Biometrika, 1994, 81( 3 ): 425 ~ 455.
- 13 Pan Q, Zhang L, Dai G, *et al.* Two denoising methods by wavelet transform[ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47( 12 ): 3401 ~ 3406.
- 14 Malfait M, Roose D. Wavelet-based image denoising using a Markov random field a priori model[ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6( 4 ): 549 ~ 565.
- 15 Crouse M S, Nowak R D, Baraniuk R G. Wavelet based statistical signal processing using hidden Markov models [ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46( 4 ): 886 ~ 902.
- 16 Peng Yu-hua. Wavelet transform and engineering application[ M ]. Beijing: Science Publishing House, 2000. [ 彭玉华. 小波变换与工程应用[ M ]. 北京: 科学出版社, 2000. ]
- 17 Mallat S G. Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models[ J ]. IEEE Transactions Acoustics, Speech, Signal Processing, 1989, 37( 12 ): 2091 ~ 2110.
- 18 Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation[ J ]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11( 7 ): 674 ~ 693.
- 19 Liu Wei, Ma Zheng-ming. Wavelet image threshold denoising based on edge detector[ J ]. Journal of Image and Graphics, 2002, 7( 8 ): 788 ~ 793. [ 柳薇, 马争鸣. 基于边缘检测的图象小波阈值去噪方法[ J ]. 中国图象图形学报, 2002, 7( 8 ): 788 ~ 793. ]
- 20 Canny J. A computational approach to edge detection[ J ]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1986, 8( 6 ): 679 ~ 698.
- 21 Hsung T C, Lun D P K, Siu W C. Denoising by singularity detection [ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47( 11 ): 3139 ~ 3144.
- 22 Xu Yan-sun, Weaver J B, Healy D M, *et al.* Wavelet transform domain filters: a spatially selective noise filtration technique[ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 1994, 3( 6 ): 747 ~ 758.
- 23 Chang S G, Yu B, Vetterli M. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising[ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9( 9 ): 1522 ~ 1531.
- 24 Nason G. Wavelet shrinkage using cross-validation[ J ]. Journal of the Royal Statistical Society, 1996, 58( 6 ): 463 ~ 479.
- 25 Weyrich N, Warhola G T. Wavelet shrinkage and generalized cross validation for image denoising[ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7( 1 ): 82 ~ 90.
- 26 Wan F Y, Yuan Z D. Optimization problem of shrinkage and thresholding policies in wavelet and the application to image processing[ A ]. In: Proceedings of the 3rd World Congress on Intelligence Control and Automation[ C ], Hefei China, 2000, 4: 2661 ~ 2665.
- 27 Vidakovic B. Nonlinear wavelet shrinkage with bayes rules and bayes factors[ J ]. Journal of the American Statistical Association, 1998, 93( 441 ): 173 ~ 179.
- 28 Feng Xing-chu, Gan Xiao-bin, Song Gao-xiang. Numerical function

- and wavelet theory[ M ]. Xi'an: Xidian University Publishing House, 2003. [冯象初,甘小冰,宋国乡.数值泛函与小波理论[ M ].西安:西安电子科技大学出版社,2003.]
- 29 Deng Da-xin, Lin Chun-sheng, Gong Shen-guang, *et al.* Wavelet threshold denoising method based on neyman-pearson criterion[ J ]. Signal Processing, 2003, **19**( 3 ) :281 ~283. [邓大新,林春生,龚沈光等.基于Neyman-Pearson准则的小波阈值去噪法[ J ].信号处理, 2003, **19**( 3 ) :281 ~283.]
- 30 Sendur Levent, Selesnick Iva W. Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency[ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, **50**( 11 ) :2744 ~2756.
- 31 Moulin P, Liu J. Analysis of multiresolution image denoising schemes using generalized Gaussian and complexity priors [ J ]. IEEE Transactions on Information Theory, 1999, **45**( 3 ) :909 ~919.
- 32 Pizurica A, Philips W. Estimating probability of presence of a signal of interest in multiresolution single-and multiband image denoising [ EB/OL ]. [http://telin.rug.ac.be/~sanja/Sanja\\_files/Publications.htm](http://telin.rug.ac.be/~sanja/Sanja_files/Publications.htm), 2005-5-5.
- 33 Zhuang X H, Huang Y, Palaniappan K, *et al.* Gaussian mixture density modeling, decomposition and applications [ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, **5**( 9 ) :1293 ~1302.
- 34 Achim A, Tsakalides P, Beserianos A. SAR Image denoising via Bayesian wavelet shrinkage based on heavy tailed modeling[ J ]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2003, **41**( 8 ) :1773 ~1784.
- 35 Xie Hua, Pierce L E, Ulaby F T. SAR speckle reduction using wavelet denoising and Markov random field modeling[ J ]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2002, **40**( 10 ) :2196 ~2212.
- 36 Portilla Javier, Strela Vasily, Wainwright Martin J, *et al.* Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain [ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, **12**( 11 ) :1338 ~1351.
- 37 Mario A T. Figueiredo, Robert D. Nowak. Wavelet-Based image estimation: an empirical bayes approach using jeffrey's noninformative prior[ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, **10**( 9 ) :1322 ~1331.
- 38 Li S Z. Markov random field modeling in computer vision[ M ]. Tokyo, Japan: Springer-Verlag, 1995.
- 39 Geman S, Geman D. Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images[ J ]. IEEE Transaction on Pattern Analysis Machine Intelligence, 1984, **6**( 6 ) :721 ~741.
- 40 Gidas B. A renormalization group approach to image processing problems[ J ]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, **11**( 2 ) :164 ~180.
- 41 Fan Guo-liang, Xia Xiang-gen. Image denoising using a local contextual hidden markov model in the wavelet domain[ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing Letters, 2001, **8**( 5 ) :125 ~128.
- 42 Jansen M, Bultheel A. Empirical bayes approach to improve wavelet thresholding for image noise reduction[ J ]. Journal of the American Statistical Association, 2001, **96**( 454 ) :629 ~639.
- 43 Pizurica A, Philips W, Lemahieu I, *et al.* A joint inter-and intrascale statistical model for Bayesian wavelet based image denoising [ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, **11**( 5 ) :545 ~557.
- 44 Pesquet J C, Krim H, Hamman E. Bayesian approach to best basis selection[ A ]. In: IEEE International conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing( ICASSP-96)[ C ], Atlanta, GA, USA, 1996, **5** :2634 ~2637.
- 45 Chipman H, Kolaczyk E, McCulloch R. Adaptive Bayesian wavelet shrinkage[ J ]. Journal of American Statistical Association, 1997, **92**( 440 ) :1413 ~1421.
- 46 Rabiner L R. A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition[ J ]. IEEE Transactions on Digital Object Identifier, 1989, **77**( 2 ) :257 ~286.
- 47 Liu J, Moulin P. Information-theoretic analysis of interscale and intrascale dependencies between image wavelet coefficients[ J ]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, **10**( 11 ) :1647 ~1658.
- 48 Zhang Lei, Bao Paul, Wu Xiao-lin. Multiscale Immse-based image denoising with optimal wavelet selection[ J ]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2005, **15**( 4 ) :469 ~481.
- 49 Crouse M S, Nowak R D, Baraniuk R G. Wavelet-based statistical signal processing using hidden markov models[ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, **46**( 4 ) :886 ~902.
- 50 Fan Guo-liang, Xia Xiang-gen. Improved hidden markov models in the wavelet domain[ J ]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, **49**( 1 ) :115 ~120.
- 51 Crouse M S, Baraniuk R G. Contextual hidden Markov models for wavelet-domain signal processing[ A ]. In: Proceedings of the 31th Asilomar Conference Signals, Systems, and Computers[ C ], Pacific Grove, CA, USA, 1997, **1**( 1 ) :95 ~100.